

6.1.1201 Gesetz von Gauss I

1 Motivation

Dieser wunderschöne Versuch veranschaulicht die Bedeutung des Gesetzes von Gauss. Mithilfe eines metallischen Siebes kann man Ladungen von einer geladenen Kugel übertragen, ohne diese Kugel zu berühren!

2 Experiment



Abbildung 1: Versuchsaufbau zum Gesetz von Gauss

Abb. 1 zeigt den experimentellen Aufbau. Eine Metallkugel wird mit $U = +15 \text{ kV}$ aufgeladen. Damit befindet sich auf der Kugel die Ladung Q . Anschliessend wird ein aufklappbares Metallsieb geerdet.

Man umhüllt nun die geladene Kugel mit dem Metallsieb, ohne dabei die Kugel zu berühren. Im elektrischen Feld der Kugel verschieben sich positive und negative Ladungen im Metallsieb derart, dass das im Leiter damit aufgebaute Gegenfeld das äussere Feld kompensiert und damit das Metallinnere feldfrei ist (siehe Abb. 2).

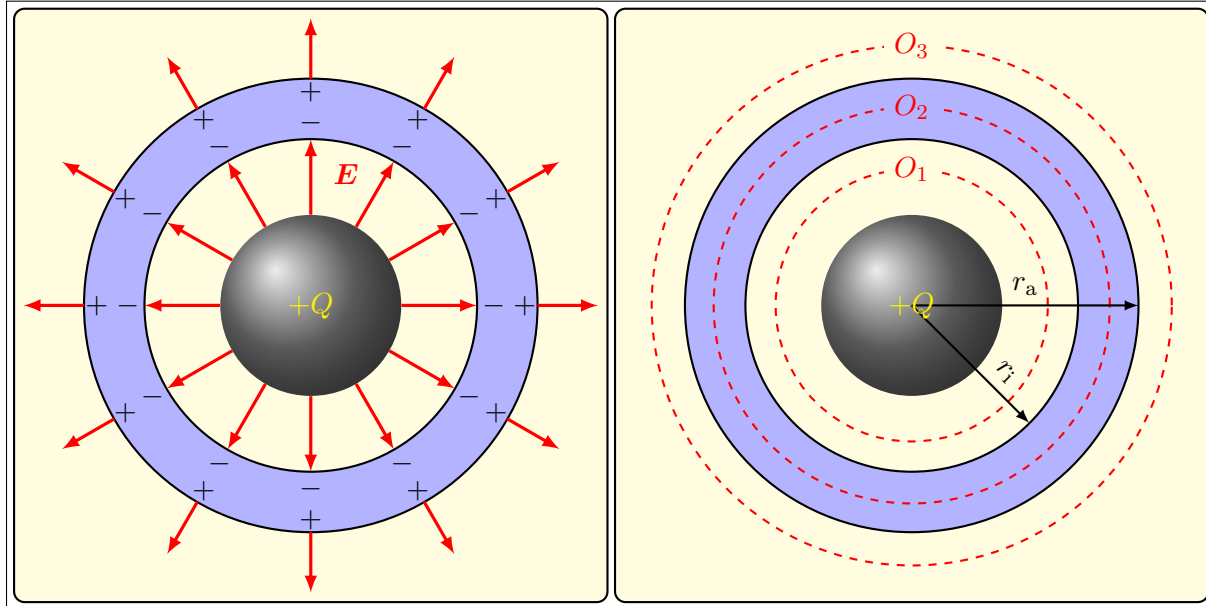


Abbildung 2: Eine elektrisch geladene Kugel wird von einem ursprünglich ungeladenen Metallsieb umschlossen. Linkes Bild: Elektrisches Feld \mathbf{E} ; das Innere des Metallsiebs (blauer Kreisring) ist feldfrei. Rechtes Bild: Drei konzentrische, kugelförmige Oberflächen $O_k, k = 1, 2, 3$.

Das Gegenfeld wird durch eine negative Ladung Q_i auf der Innenseite und eine positive Ladung Q_a auf der Aussenseite des Metallsiebs erzeugt. Wir bestimmen das elektrische Feld $\mathbf{E}(r_k), k = 1, 2, 3$ für drei konzentrische Kugelschalen mit

$$r_1 < r_i \quad (1)$$

$$r_i < r_2 < r_a \quad (2)$$

$$r_a < r_3 \quad (3)$$

(siehe Abb. 2, rechtes Bild) und damit auch diese beiden Ladungen mit dem Gesetz von Gauss:

$$Q = \varepsilon_0 \iint_{O_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (4)$$

Die innere Kugelschale O_1 umschließt die Ladung $+Q$ auf der Metallkugel. Das elektrische Feld ist radialsymmetrisch und parallel zum Flächenvektor $d\mathbf{A}$. Damit gilt

$$Q = \varepsilon_0 \cdot E(r_1) \cdot 4\pi r_1^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow E(r_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1^2} \quad (6)$$

Die mittlere Kugelschale O_2 verläuft im Inneren des Metallsiebs. Wegen der freien Verschiebbarkeit der Ladungen im Leiter ist dort die elektrische Feldstärke identisch null. Andererseits umschließt diese Kugel die Summe der Ladungen auf der Metallkugel und auf der Innenseite des Metallsiebs.

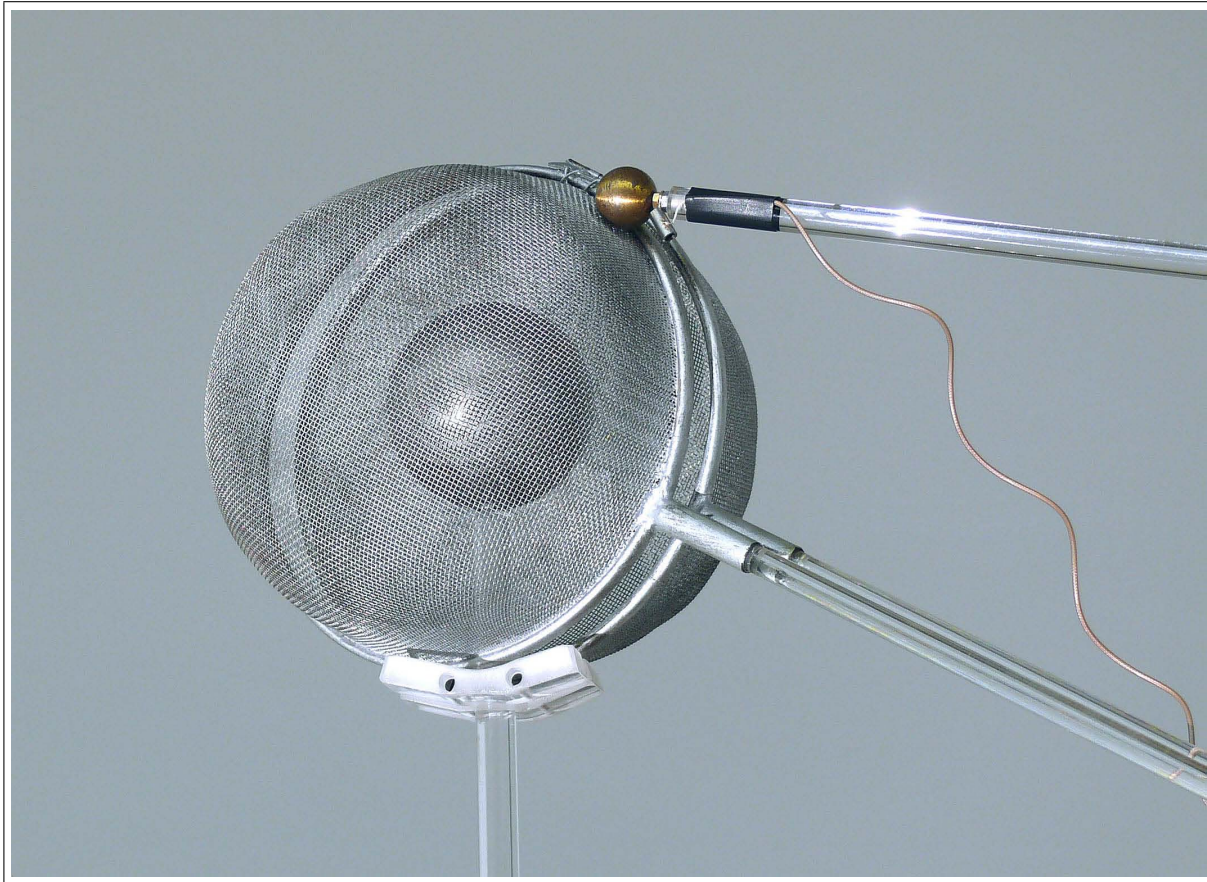


Abbildung 3: Erdung des Metallsiebs

Damit ist

$$Q_2 = Q + Q_i = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i = -Q \quad (7)$$

Auf der Innenseite des Metallsiebs befindet sich demnach die Ladung $Q_i = -Q$!

Die äussere Kugelschale O_3 wiederum umschliesst alle vorhandenen Ladungen. Da die Ladung eine Erhaltungsgrösse ist, muss die gesamte eingeschlossene Ladung gleich $+Q$ sein:

$$Q_3 = Q + Q_i + Q_a := +Q \quad \Rightarrow \quad Q_a = +Q \quad (8)$$

Auf der Aussenseite des Metallsiebs befindet sich demnach die Ladung $Q_a = +Q$!

Dass diese Ladungen tatsächlich so verteilt sind, lässt sich mit folgendem Vorgehen zeigen:

Man erdet das Metallsieb über ein ballistisches Galvanometer (siehe Abb. 3) und stellt einen negativen Ladungsstoss fest, da dem Sieb die **negative** Ladung $-Q$ zugeführt wird. Damit ist aber das Sieb insgesamt mit der Ladung $-Q$ aufgeladen, so dass sich die Feldverteilung in Abb. 4 einstellt. Die Ladung $-Q$ sitzt weiterhin auf der Siebinnenfläche, während die Aussenfläche nun ungeladen ist und damit auch das Feld aussen verschwindet.

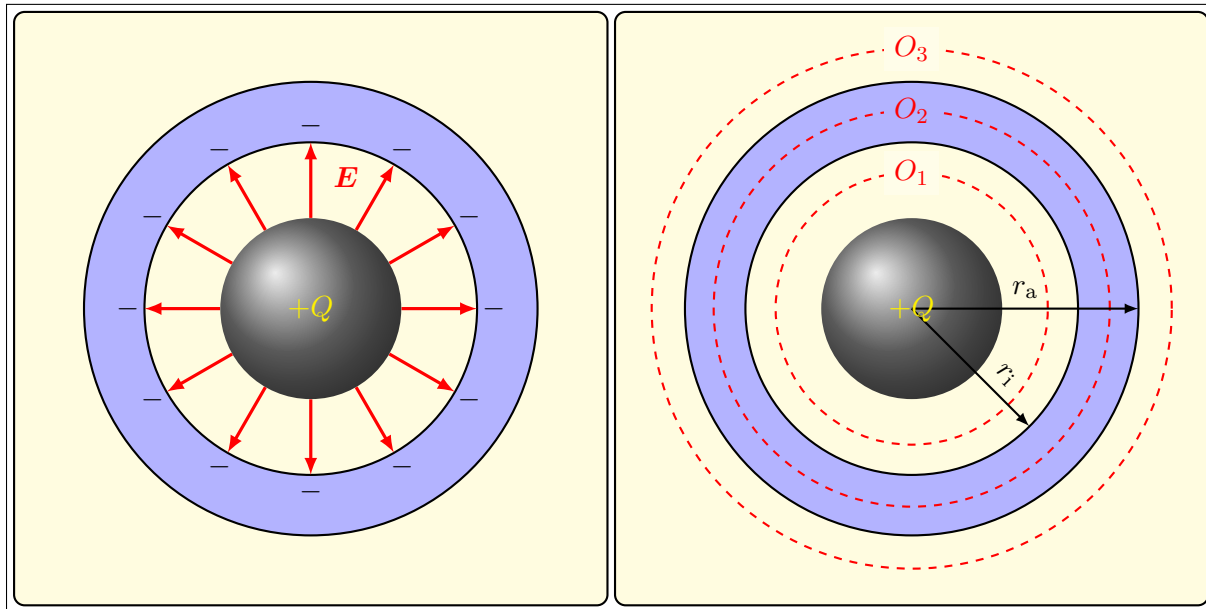


Abbildung 4: Eine elektrisch geladene Kugel wird von einem ursprünglich ungeladenen Metallsieb umschlossen und anschliessend geerdet. Linkes Bild: Elektrisches Feld \mathbf{E} ; das Innere des Metallsiebs (blauer Kreisring) und der Aussenraum sind feldfrei. Rechtes Bild: Drei konzentrische, kugelförmige Oberflächen $O_k, k = 1, 2, 3$.

Die Ladung $-Q$ auf dem Sieb lässt sich nun nachweisen, indem man das Sieb aufklappt, von der Metallkugel entfernt und wieder über das ballistische Galvanometer erdet. Diesmal stellt man einen **positiven** Ladungsschoss fest, so dass das Sieb wieder ungeladen ist.

Dieser Vorgang lässt sich beliebig oft wiederholen, ohne dass sich die Ladung auf der Metallkugel ändern würde!

3 Theorie

Das **Gesetz von Gauss** folgt aus der Kombination des (rein mathematischen) Satzes von Gauss und der (physikalischen) Maxwellgleichung, welche eine Beziehung zwischen Ladungen und elektrischer Feldstärke herstellt.

Der Satz von Gauss führt ein Volumenintegral einer skalaren Grösse in ein Oberflächenintegral eines Vektorfeldes über:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV, \quad (9)$$

wobei ∂V die geschlossene Oberfläche des Volumens V bedeutet. Mit der Maxwellgleichung

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10)$$

erhält man schliesslich das **Gesetz von Gauss**

$$\boxed{\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}} \quad (11)$$

Der Fluss des elektrischen Feldes aus einer geschlossenen Oberfläche heraus ist gleich der durch die Oberfläche eingeschlossenen Ladung, dividiert durch die Dielektrizitätskonstante des Vakuums.