

5.5.2 Seilwelle



1 Motivation

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer solitären Seilwelle wird als Funktion der Seilzugspannung gemessen.

2 Experiment

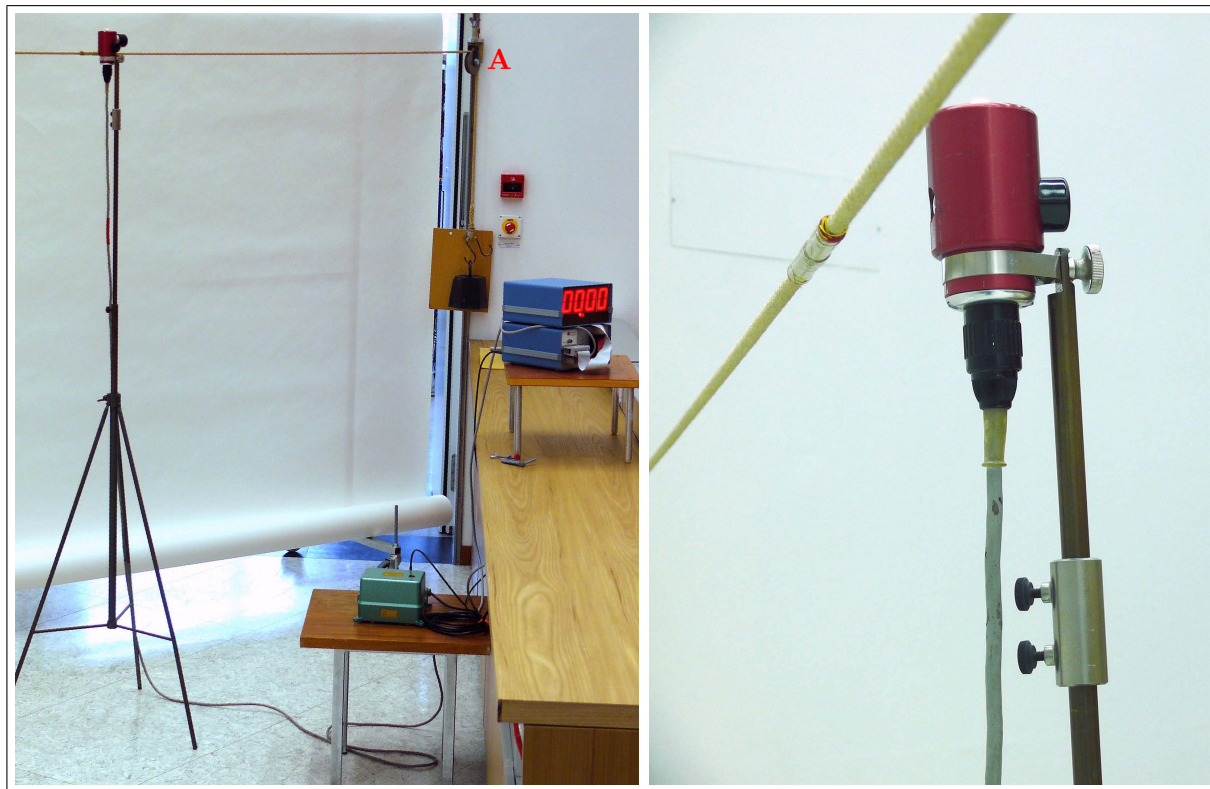


Abbildung 1: Linkes Bild: Versuchsaufbau „Seilwelle“. Rechtes Bild: Lichtschranke mit Fotodiode als Sensor für die Wellenauslenkung.

Zwischen zwei festen Punkten **A** und **B** ist ein Seil der Dichte ρ und der Querschnittsfläche A mit der Kraft F vorgespannt (siehe Abbn. 1 und 2).

In der Nähe des Aufhängepunktes **A** schlägt man mit einem Stab von unten gegen das Seil. Der dadurch erzeugte Buckel (Solitär!) läuft mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v an der Lichtschranke vorbei zum Aufhängepunkt **B**, wird dort hart (mit Phasensprung π) reflektiert und läuft ein zweites Mal an der Lichtschranke vorbei, die oberhalb der Ruhelage angebracht ist. Man misst die Laufzeit Δt des Wellenbuckel zwischen den beiden Durchläufen mit gleicher Phasenlage für die Entfernung 2ℓ .

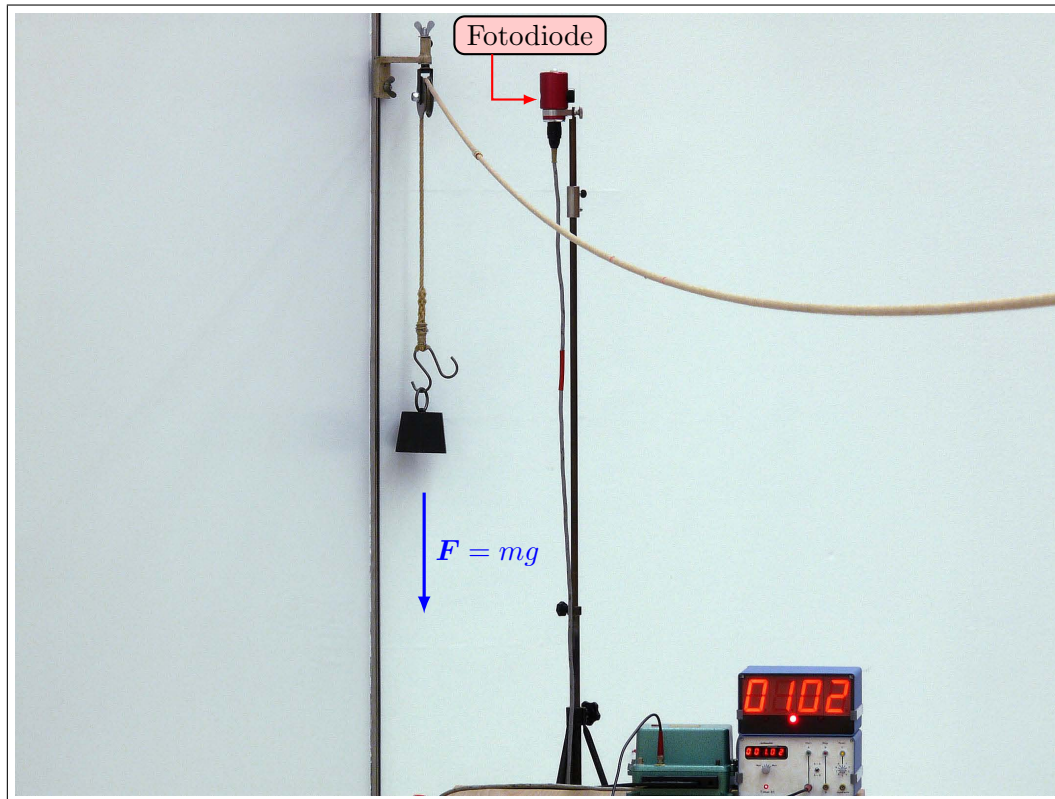


Abbildung 2: Spannung des Seils mit Masse m und Nachweis der Auslenkung mit einer Fotodiode.

Die **Differentialgleichung** der **Wellenausbreitung** einer Seilwelle lautet:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \quad (1)$$

Dabei bedeuten ξ die transversale Auslenkung des Seils, $S = F/A$ die Zugspannung und ρ die Dichte des Seils. Die Geschwindigkeit v der Welle ist damit gleich

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{mg}{\rho A}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \Rightarrow v \sim \sqrt{m} \quad (2)$$

mit der Massenbelegung $\mu = \rho A$. Die Laufzeit der Welle ist dann

$$\boxed{\Delta t = \frac{2\ell}{v} = 2\ell \sqrt{\frac{\mu}{mg}}} \quad (3)$$

Mit $\ell = 13,6\text{ m}$ und $\mu = 59\text{ g/m}$ erhält man die theoretischen Laufzeiten der Tabelle 1.

Hinweis: Da sich bei jeder Änderung der Zugspannung die Auslenkung des Seils ändert, muss die Lichtschranke jeweils neu justiert werden.

Tabelle 1: Laufzeiten Δt in Funktion der am Seil angehängten Masse m .

m/kg	$\Delta t/\text{ms}$
5	943
10	667
20	472

3 Theorie

3.1 Ausbreitung von Seilwellen

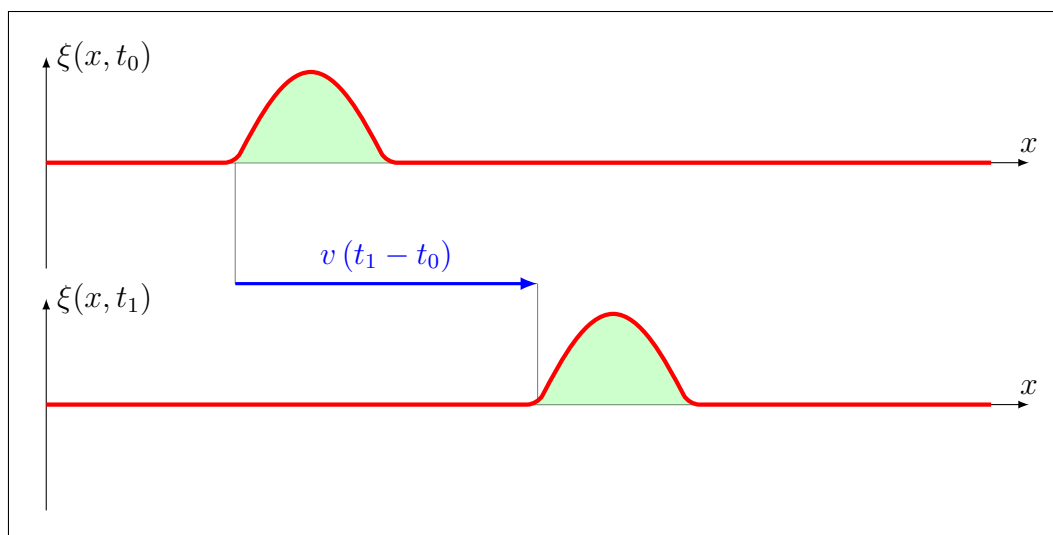


Abbildung 3: Ausbreitung einer Seilwelle.

Wir betrachten ein Seil, dessen beide Enden an den Wänden festgebunden sind. Das Seil verläuft horizontal (wir vernachlässigen die Gravitationskraft) und ist gespannt.

Wenn wir das Seil mit einem kurzen seitlichen Schlag auslenken, beobachten wir, dass die anfängliche Auslenkung als Wellenberg mit konstanter Geschwindigkeit dem Seil entlang wandert (siehe Abb. 3).

Wir sagen, dass sich die transversale Auslenkung als eine Welle ausbreitet. Wir bemerken:

- Jeder Punkt des Seils schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.
- Ein Punkt des Seils bleibt so lange in Ruhe, bis der Wellenberg ihn erreicht.
- Er wird dann aus seiner Ruhelage ausgelenkt.
- Er kehrt schliesslich in den Ruhezustand zurück. Es folgt daraus: die einzelnen Punkte des Seils werden durch die Wellenbewegung *nicht* transportiert. Sie bewegen sich nur vorübergehend um ihre Gleichgewichtslage.

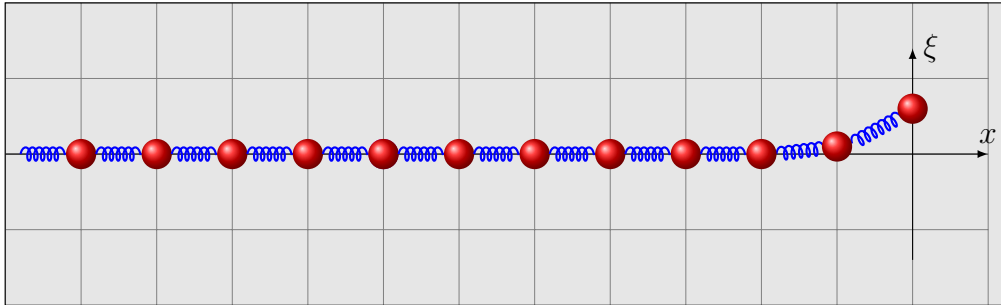


Abbildung 4: Ein Feder-Masse-System. Die erste Masse wurde transversal ausgelenkt.

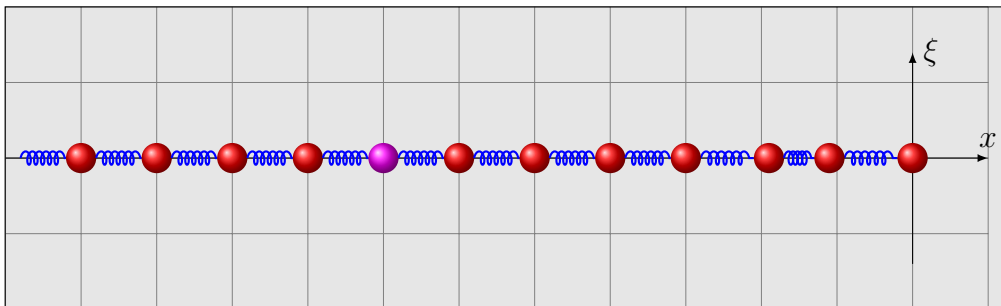


Abbildung 5: Longitudinale Wellen im Masse-Feder-System. Die zweite und dritte Masse von rechts sind aus ihrer Ruhelage ausgelenkt.

3.2 Beispiel: Wellenausbreitung im Masse-Feder-System

Wir können die in der Einleitung besprochene Wellenausbreitung in einem Festkörper anschaulich demonstrieren, indem wir die Atome durch kleine, massive Kugeln und die Wechselwirkung zwischen den Atomen durch zwischen den Kugeln gespannte Federn ersetzen (siehe Abb. 4).

Im Ruhezustand ist der Abstand zwischen den Massen so gewählt, dass keine Kräfte zwischen Paaren von Massen wirken (d.h., wir nehmen an, dass die normale Länge der Feder gleich dem Abstand zwischen zwei Massen ist.).

Wenn die 1. Masse kurz longitudinal oder transversal ausgelenkt wird, erhöht sich der Abstand zwischen der 1. und der 2. Masse. Die Federkraft wirkt dann als eine Rückstellkraft, die versucht, die Massen zusammenzubringen. Als Folge davon bewegt sich die 1. Masse in Richtung ihrer Ruhelage, und die 2. Masse wird aus ihrer Ruhelage weggezogen. Die 2. Masse bewegt sich jetzt, und der gleiche Vorgang findet zwischen der zweiten und dritten Masse statt.

Diese Bewegung ist in Abb. 5 für longitudinale Wellen und in Abb. 6 für transversale Wellen gezeigt.

Wir bemerken wie im Fall des Seils:

- a) Jede Masse schwingt um ihre Ruhelage;
- b) Jede Masse bleibt ungefähr so lange in Ruhe, bis der Wellenberg sie erreicht;

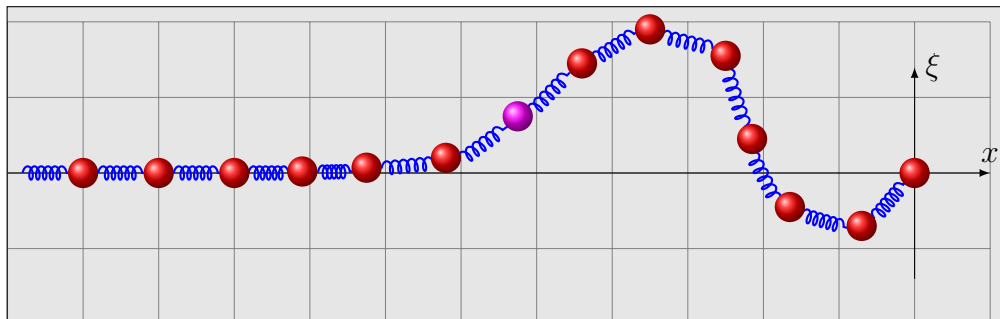


Abbildung 6: Transversale Wellen im Masse-Feder-System.

- c) Sie führt dann ihre Bewegung um ihre Ruhelage aus;
- d) Sie kehrt schliesslich in den Ruhezustand zurück.

Diese Anordnung wird nützlich sein, wenn wir die Ausbreitung von Wellen in einem Seil quantitativ betrachten. Wir werden das Seil als ein kontinuierliches Masse-Feder-System mit infinitesimalen Massenelementen betrachten.

3.3 Transversale Wellen

Bei den transversalen Wellen ist die Auslenkung ξ stets senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung. Beispiele sind transversale Seilwellen, transversale Schwingungen einer Kette von Massenpunkten, welche durch Federn miteinander verbunden sind (siehe Abb. 6), oder die elektromagnetischen Wellen.

Wir betrachten als Beispiel eine Auslenkung ξ um Δx in x -Richtung mit einer Ausbreitung in z -Richtung:

$$\xi = \Delta x \cdot \hat{x} \quad (4)$$

Die Wellenausbreitung hat dann die folgende Form:

$$\xi(z, t) = \{Af(z - vt)\} \cdot \hat{x} \quad (5)$$

$$|\xi(z, t)| = |Af(z - vt)| \quad (6)$$

Eine harmonische Welle als Spezialfall davon lautet damit:

$$\xi(z, t) = A \cos(kz - \omega t) \hat{x} \quad (7)$$

Üblicherweise gibt es zwei Arten, eine Welle darzustellen:

- a) Man betrachtet die Amplitude am festvorgegeben Ort in Funktion der Zeit. Abb. 7 zeigt entsprechende Zeitverteilungen für vier Orte im abgestuften Abstand von je $\lambda/4$.
- b) Im Gegensatz dazu kann man auch die räumliche Verteilung der Welle zu einem fest vorgegeben Zeitpunkt betrachten. Abb. 8 zeigt entsprechende Ortsverteilungen für vier Zeitpunkte im abgestuften Abstand von je $T/4$.

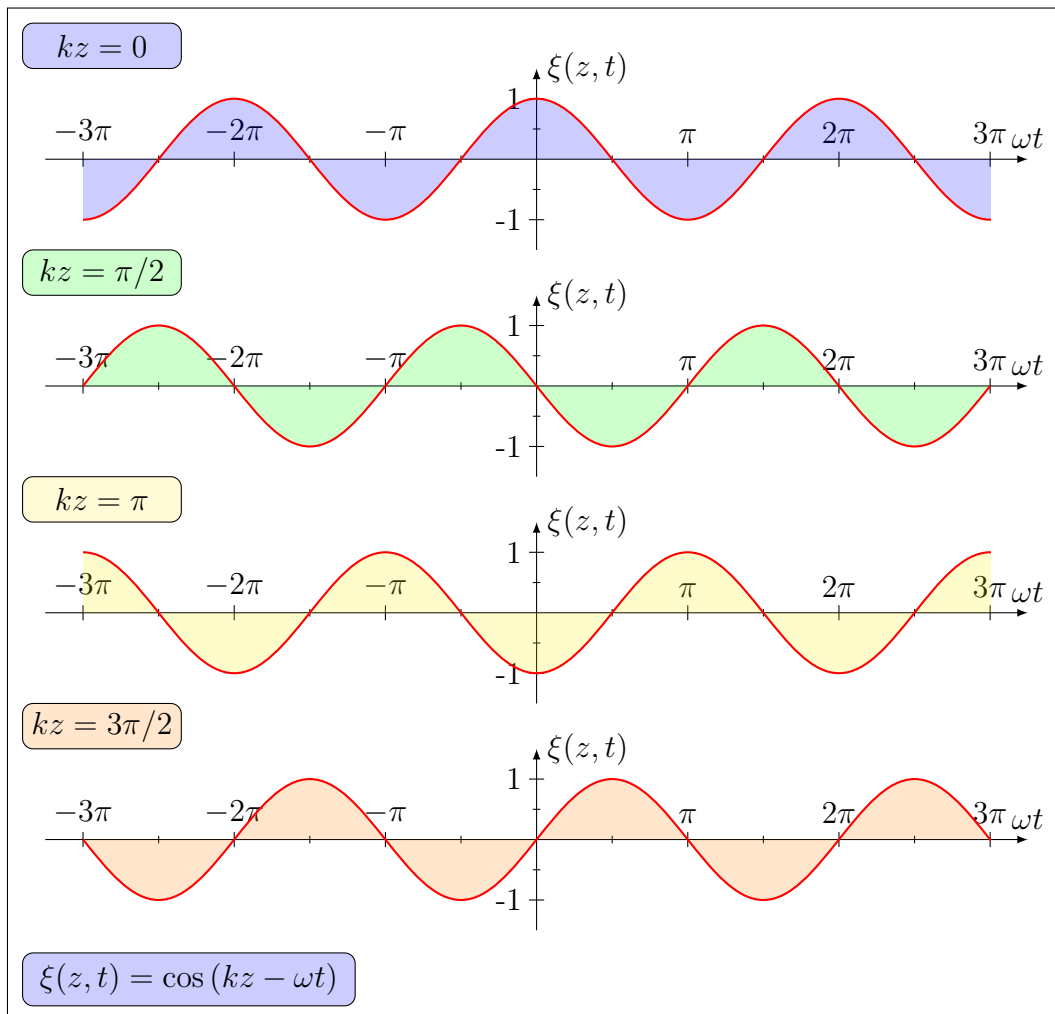


Abbildung 7: Zeitabhängigkeit der transversalen Welle für 4 verschiedene Orte im abgestuften Abstand von jeweils $\Delta z = \lambda/4$.

3.4 Transversale elastische Seilwellen

Der Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen und den physikalischen Eigenschaften des Seils kann mit Hilfe der Newtonschen Gesetze hergeleitet werden.

Wir unterteilen das Seil in differentielle Massenelemente dm . In diesem Fall kann das Seil als ein Masse-Feder-System betrachtet werden, wobei die diskrete Reihe von Massen durch eine kontinuierliche Verteilung von Massenelementen ersetzt wird.

Wir nehmen an, dass die Massenelemente sich nur in der vertikalen Richtung um ihre Ruhelage bewegen können.

Wir betrachten nun ein einzelnes Massenelement dm der Länge dx , dessen Anfangspunkt sich im Punkt x des Seils befindet und dessen Endpunkt sich im Punkt $x + dx$ befindet. Die Auslenkung ist durch die Funktion $\xi(x)$ bestimmt. Siehe Abb. 9.

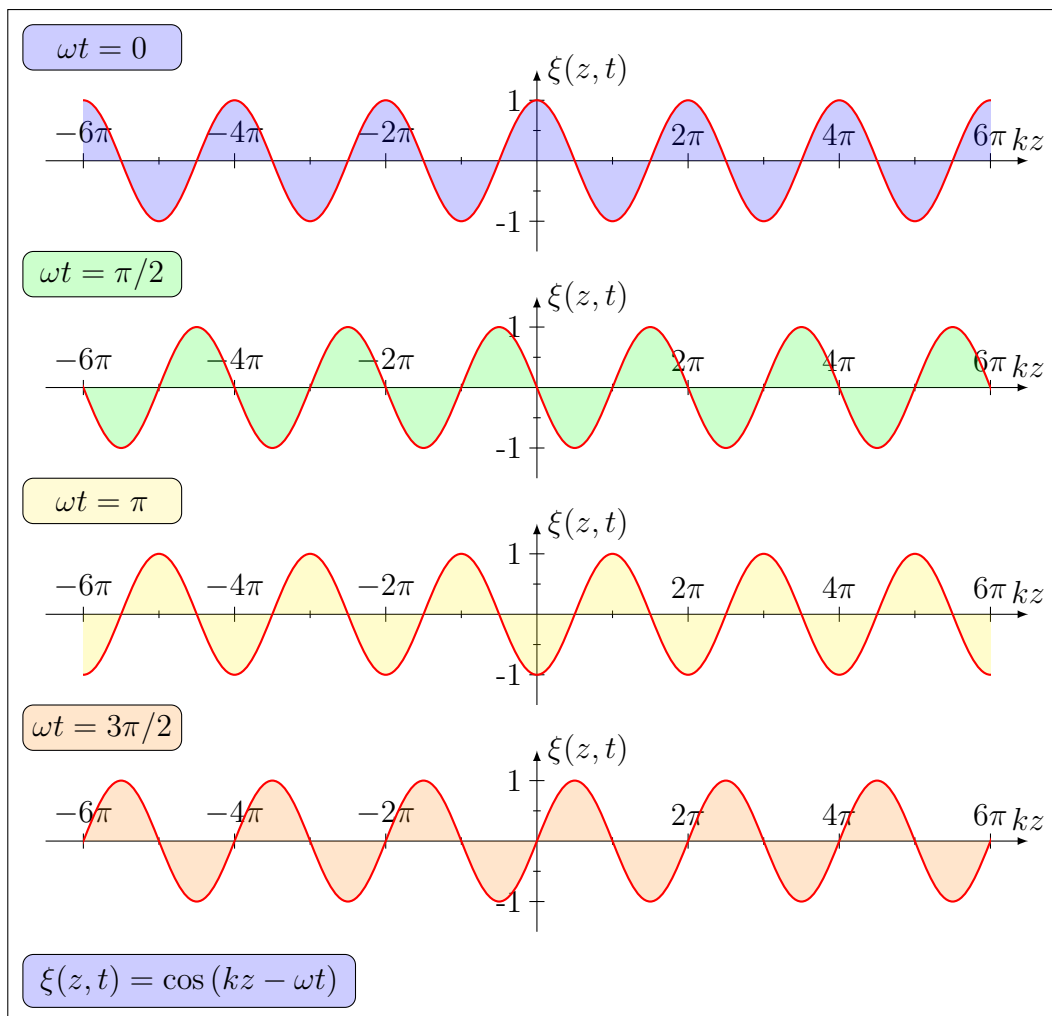


Abbildung 8: Ortsabhängigkeit der transversalen Welle für 4 verschiedene Zeitpunkte im abgestuften Abstand von jeweils $\Delta t = T/4$.

Die auf das Seil mit Querschnittsfläche A wirkende Kraft \mathbf{F} erzeugt eine **Zugspannung** $\mathbf{S} = \mathbf{F}/A$. Die auf das Massenelement wirkende resultierende vertikale Komponente der Zugspannung ist

$$\Delta S_y = S \sin \alpha' - S \sin \alpha, \quad (8)$$

α und α' sind die Winkel an beiden Enden des Massenelements zur Horizontalen (Die Auswirkung Gravitationskraft wird als vernachlässigbar gegenüber der Zugspannung vorausgesetzt.).

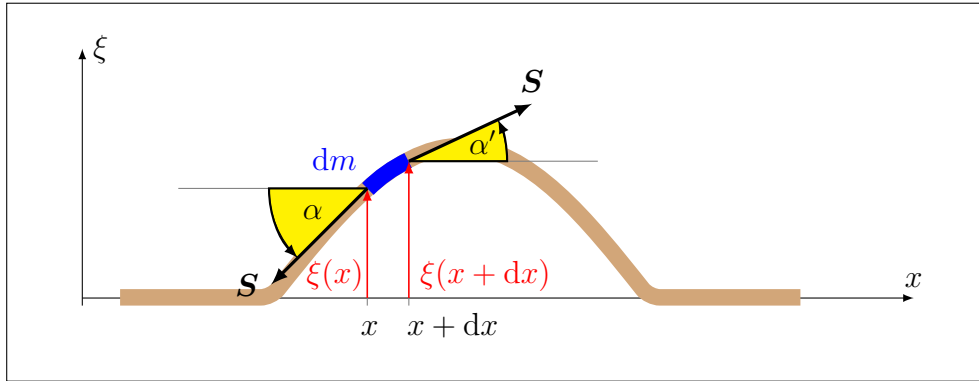
Für kleine Auslenkungen gilt die genäherte Gleichung

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha$$

Es folgt:

$$\Delta S_y \approx S \tan \alpha' - S \tan \alpha, \quad (9)$$

Die Steigung des Seils im Punkt x ist gleich der Ableitung der Auslenkung ξ nach x .

Abbildung 9: Auf das Massenelement dm eines Seiles wirkende Kräfte

Da die Funktion ξ von zwei Variablen abhängt, müssen wir die partielle räumliche Ableitung verwenden:

$$\tan \alpha = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tan \alpha' = \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} \quad (10)$$

D.h., die resultierende vertikale Zugspannung kann als Funktion der Ableitung der Auslenkungsfunktion geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Delta S_y &= S \tan \alpha' - S \tan \alpha \\ &= S \left\{ \frac{\partial \xi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ erhalten wir schliesslich

$$dS_y = S \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (11)$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der differentiellen Segmente können mit Hilfe der zeitlichen partiellen Ableitungen gewonnen werden:

$$v_y(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{und} \quad a_y(x, t) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (12)$$

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt

$$dS_y \cdot A = dm \cdot a_y \quad \Rightarrow \quad S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \underbrace{dx A}_{=dV} = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (13)$$

Nach Division mit dV folgt

$$S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (14)$$

und nach weiterer Division durch S

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}} \quad (15)$$

Diese Gleichung ist die **Differentialgleichung** der **Wellenausbreitung**.

Wir verwenden das Ergebnis

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit der Seilwellen** ergibt sich damit zu

$$v^2 = \frac{S}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \pm \sqrt{\frac{S}{\rho}}, \quad (17)$$

wobei S die **Zugspannung** des Seils oder der Saite, und ρ seine **Dichte** ist. Wir bemerken, dass die Einheiten der Gleichung gegeben sind durch

$$\sqrt{\frac{(\text{N}/\text{m}^2)}{(\text{kg}/\text{m}^3)}} = \sqrt{\frac{\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)}{(\text{kg}/\text{m}^3)}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (18)$$

d.h., die Einheit entspricht wirklich einer Geschwindigkeit.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nur von den Eigenschaften des Seils ab:

- a) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt mit der Zugkraft zu. Je grösser die Zugkraft ist, desto schneller kehren die Massenelemente in ihre Gleichgewichtslage zurück.
- b) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nimmt mit der Dichte ab. Je grösser diese Dichte ist, desto langsamer kehren die Massenelemente in ihre Gleichgewichtslage zurück.

3.5 Reflexion und Transmission

Wir wollen nun noch untersuchen, was beim Auftreffen einer Welle auf eine Grenzfläche geschieht, die zwei verschiedene Medien voneinander trennt.

Eine Welle laufe in einem Medium 1 mit Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k_1 nach rechts. An der Grenzfläche ($x = 0$) treffe sie auf ein 2. Medium mit anderen Materialkonstanten. Im allgemeinen wird dann ein Teil der Welle im anderen Medium weiterlaufen (**Transmission**) und ein anderer Teil wird reflektiert und nach links zurück laufen (**Reflexion**) (siehe Abb. 10).

Die Kreisfrequenz, als Taktgeberin der Welle, wird sich dabei nicht ändern; sie ist also identisch für auftreffende, transmittierte und reflektierte Welle. Was sich aber im allgemeinen ändern wird, sind die Wellengeschwindigkeit v und damit auch die Wellenzahl k bzw. die Wellenlänge λ .

Bei der Seilwelle zum Beispiel ist $v = \sqrt{S/\rho}$, so dass sowohl eine andere Dichte als auch eine andere Seilspannung die Geschwindigkeit ändern.

Bei der Schallwelle im Festkörper ist $v = \sqrt{E/\rho}$. In diesem Fall bewirken ein anderer Elastizitätsmodul oder eine andere Dichte eine veränderte Geschwindigkeit.

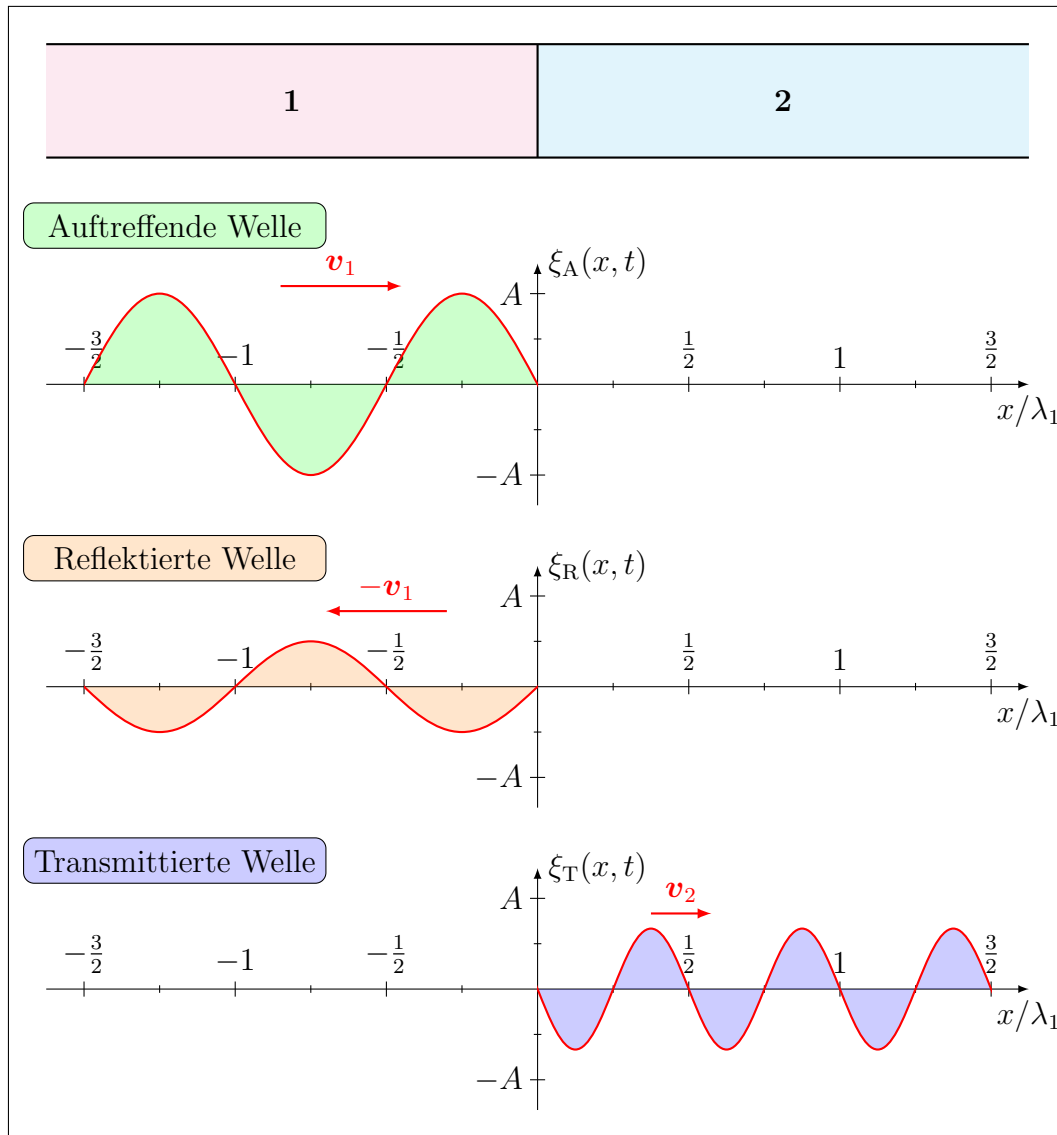


Abbildung 10: Transmission und Reflexion an der Grenzfläche zweier Medien 1 und 2 mit $\alpha = 2$.

Es gibt demnach drei verschiedene Wellenfunktionen:

$$\xi_A = Ae^{i(+k_1x - \omega t)} \quad A > 0 \quad \text{Auftreffend} \quad (19)$$

$$\xi_R = Re^{i(-k_1x - \omega t + \delta_R)} \quad R \geq 0 \quad \text{Reflektiert} \quad (20)$$

$$\xi_T = Te^{i(+k_2x - \omega t + \delta_T)} \quad T \geq 0 \quad \text{Transmittiert} \quad (21)$$

Die Phase der auftreffenden Welle haben wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich null gesetzt.

Es müssen die folgenden beiden Randbedingungen erfüllt sein:

a) Stetigkeit der Amplitude:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\xi_A + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \xi_T \quad (22)$$

b) Beispiel Seilwelle: Die vertikalen Kräfte links sind gleich den vertikalen Kräften rechts.

$$S_1 \left. \frac{\partial \xi_A}{\partial x} \right|_{x=0} + S_1 \left. \frac{\partial \xi_R}{\partial x} \right|_{x=0} = S_2 \left. \frac{\partial \xi_T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (23)$$

Aus Gl. (22) folgt:

$$A + R e^{i\delta_R} = T e^{i\delta_T} \quad (24)$$

Das sind zwei Gleichungen, eine für den Real- und eine für den Imaginärteil. Die Gleichung für den Imaginärteil ergibt:

$$T \sin \delta_T = R \sin \delta_R, \quad (25)$$

da A reell ist.

Aus Gl. (23) folgt:

$$A S_1 k_1 = T S_2 k_2 e^{i\delta_T} + R S_1 k_1 e^{i\delta_R} \quad (26)$$

$$\Rightarrow 0 = T S_2 k_2 \sin \delta_T + R S_1 k_1 \sin \delta_R \quad (27)$$

$$\Rightarrow 0 = T S_2 k_2 \sin \delta_T + T S_1 k_1 \sin \delta_T \quad (28)$$

Wir formen zunächst das Produkt $(S_j k_j)$, $j = 1, 2$ um:

$$k_j = \frac{\omega}{v_j} = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{S_j}} \quad (29)$$

$$\Rightarrow k_j S_j = \omega \sqrt{S_j \rho_j} \quad (30)$$

Mit der Definition

$$\alpha := \frac{k_2 S_2}{k_1 S_1} = \sqrt{\frac{S_2 \rho_2}{S_1 \rho_1}} \quad (31)$$

liefert Gl. (22) schliesslich die folgende Bedingung:

$$T \sin \delta_T (\alpha + 1) = 0 \quad (32)$$

Da $\alpha + 1 > 1$, kann diese Gleichung nur für

$$\sin \delta_T = 0 \quad (33)$$

erfüllt werden. Als mögliche Lösungen kommen zunächst $\delta_T = 0$ oder $\delta_T = \pi$ in Frage. Die 2. Lösung erfüllt aber nicht die Bedingung, dass

$$\lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_A := \xi_T \quad (34)$$

gelten muss, sondern liefert vielmehr

$$\lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_A = -\xi_T \quad (35)$$

Aus $\delta_T = 0$ folgt wiederum

$$\sin \delta_R = 0 \quad (36)$$

Für die reflektierte Welle gibt es keine weitere Bedingung, so dass sowohl $\delta_R = 0$ als auch $\delta_R = \pi$ mögliche Lösungen sind.

Wir setzen diese erhaltenen Phasen in die beiden Randbedingungen ein und erhalten aus Gl. (24)

$$A = T \mp R \quad (37)$$

und aus Gl. (26)

$$A = \alpha T \pm R \quad (38)$$

Mithilfe dieser beiden Gleichungen können wir die Amplitude sowohl für die Transmission als auch für die Reflexion berechnen:

$$R = \pm \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A \quad \text{und} \quad T = \frac{2A}{1 + \alpha} \quad (39)$$

Spezialfälle:

a) $\alpha = 1$

Da hierfür $S_1 \rho_1 = S_2 \rho_2$ erforderlich ist, kann man auch mit unterschiedlichen Materialien diese Bedingung erfüllen!

$$\Rightarrow R = 0 \quad \text{und} \quad T = A \quad (40)$$

b) $\alpha > 1$

Da $R \in \mathbb{R}$ und $R \geq 0$, gilt in diesem Fall das negative Vorzeichen und deshalb auch

$$\delta_R = \pi \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} A \quad \text{und} \quad T = \frac{2A}{\alpha + 1} \quad (41)$$

Das **feste Ende** am Seil entspricht

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R(\alpha) = A \quad \Rightarrow \quad T \rightarrow 0 \quad (42)$$

Bei diesem Grenzübergang wird die Welle vollständig reflektiert, und es findet ein **Phasensprung** um 180° statt (siehe Abb. 11)!

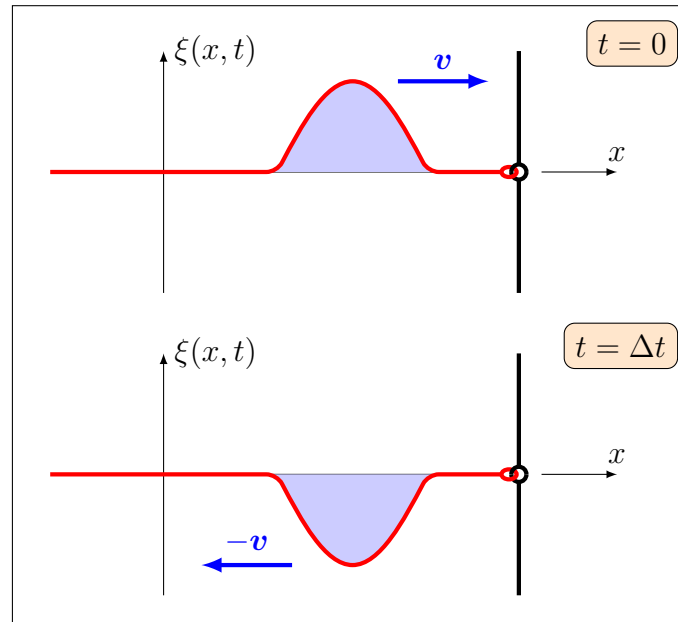


Abbildung 11: Reflexion eines Wellenbergs am festen Ende.

c) $\alpha < 1$. Da $R \in \mathbb{R}$ und $R \geq 0$, gilt in diesem Fall das positive Vorzeichen und deshalb auch

$$\delta_R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A \quad \text{und} \quad T = \frac{2A}{1 + \alpha} \quad (43)$$

Das **lose Ende** am Seil entspricht

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R(\alpha) = A \quad (44)$$

Der Grenzfall $\alpha = 0$ lässt sich nur realisieren, indem man das Medium 1 an Vakuum angrenzen lässt. Dann ist es aber nicht mehr sinnvoll, von einer Transmission ($T = 2A$) zu reden, da keine mechanische Welle ins Vakuum übertreten kann. Beim Grenzübergang wird die Welle ebenfalls vollständig reflektiert, aber es findet **kein Phasensprung** statt (siehe Abb. 12)!

Die Amplituden für Transmission und Reflexion sind als Funktion des Parameters α in Abb. 13 aufgetragen.

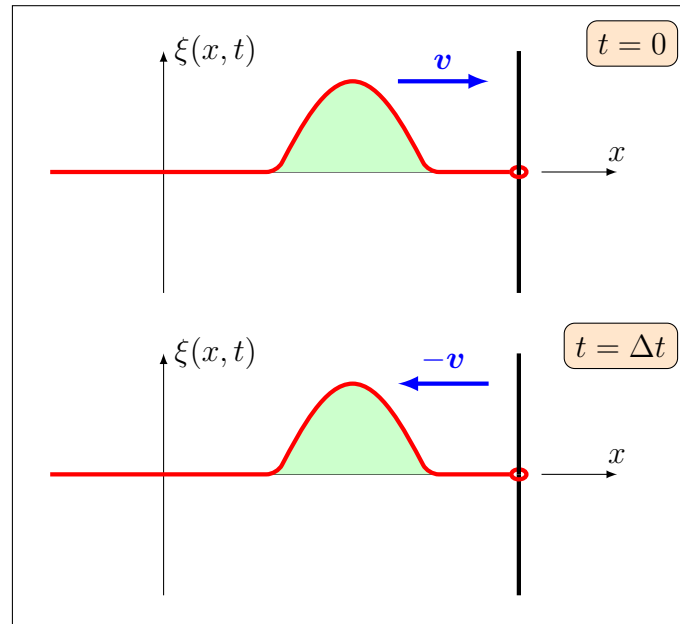
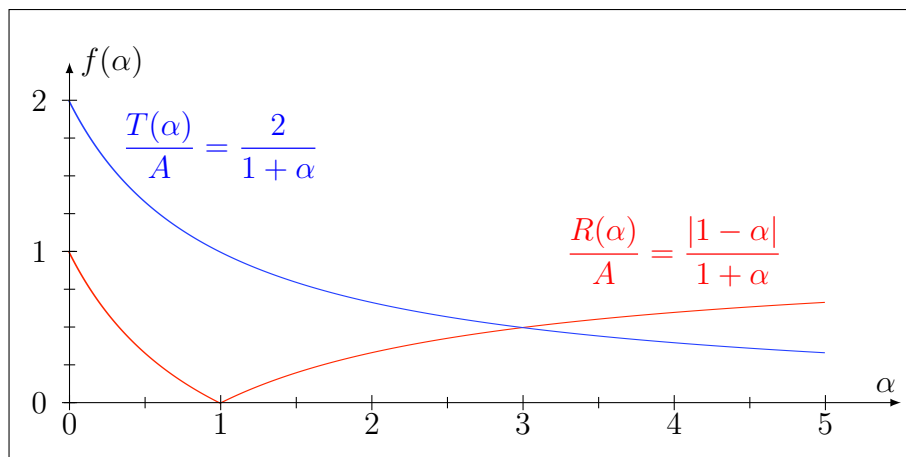


Abbildung 12: Reflexion eines Wellenbergs am losen Ende.

Abbildung 13: Auf die auftreffende Amplitude A normierte Amplituden $R(\alpha)$ für Reflexion und $T(\alpha)$ für Transmission als Funktion des Parameters α .