5.1.4 Schwingungsdauer abhängig von Amplitude

******

1 Motivation

Dieser Versuch zeigt, dass die Schwingung eines Fadenpendels nur näherungsweise unabhängig von der Amplitude ist.

2 Theorie

2.1 Fadenpendel (Näherung in 1. Ordnung)

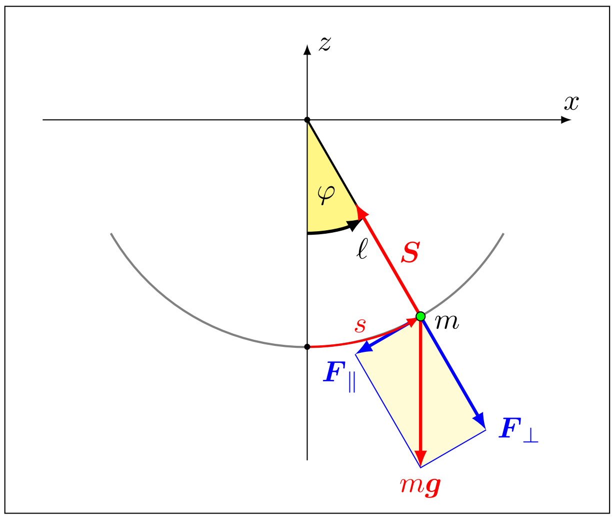

Abbildung 1: Mathematisches Pendel.

Wir betrachten einen Massenpunkt der Masse m, welcher über einen masselosen Faden der Länge ℓ an einem Punkt drehbar aufgehängt ist. Reibungskräfte am Drehpunkt sowie Luftwiderstand vernachlässigen wir. Damit wirken die Schwerkraft $m\boldsymbol{g}$ und die Seilkraft $\boldsymbol{S}$. Einen solchen idealisierten Aufbau nennt man das mathematische Pendel (siehe Abb. 1). Sei φ der Winkel zwischen dem Faden und der Vertikalen. Zur Herleitung der Schwingungsgleichung wenden wir den Satz von Newton an:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{1}$$

Die Seilzugkraft $\boldsymbol{S}$ hebt die Wirkung der zur Bahn senkrechten Komponente $\boldsymbol{F}_\perp$ der Schwerkraft auf:

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}_\perp = 0 \tag{2}$$

Damit wird der Massenpunkt m vom Faden auf eine Kreisbahn mit Radius ℓ gezwungen, da die von der Schwerkraft verursachte Beschleunigung nur eine Komponente tangential zu dieser Kreisbahn hat.

Sei s die vom Tiefpunkt des Pendels aus gemessene Bogenlänge, dann finden wir

$$m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -mg\ell \sin\varphi\,, \tag{3}$$

und, da die Bogenlänge $s = \ell\varphi$ ist,

$$m\ell\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\varphi \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \tag{5}$$

Für kleine Auslenkungen gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$, so dass man schliesslich die Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0} \tag{6}$$

erhält. Es fällt auf, dass die Bewegung des Pendels unabhängig von der Masse m ist, die sich ja aus aus der Gleichung herausgekürzt hat! Es handelt sich hier um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{7}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\varphi(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{8}$$

Das Pendel beschreibt also eine harmonische Schwingung mit der Periode

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \tag{9}$$

Die Periode ist demnach unabhängig von der Masse des Pendels!

2.2 Reales Fadenpendel

Da Pendel tatsächlich immer mehr als infinitesimal ausgelenkt werden, verhalten sie sich nichtlinear. Die allgemeine Differentialgleichung ist elementar nicht lösbar und erfordert Kenntnisse über elliptische Integrale. Damit lässt sich die die Schwingungsdauer T in eine Reihe entwickeln:

$$\boxed{T = 2\pi\frac{\ell}{g}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi}{2} + \ldots\right\}} \tag{10}$$

Die Periode nimmt demnach mit zunehmender Auslenkung zu.

Abb. 2 zeigt die relative Vergrösserung der Periode T in Funktion der maximalen Amplitude φ:

$$\frac{T(\varphi) - T(0)}{T(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi}{2} + \ldots \tag{11}$$

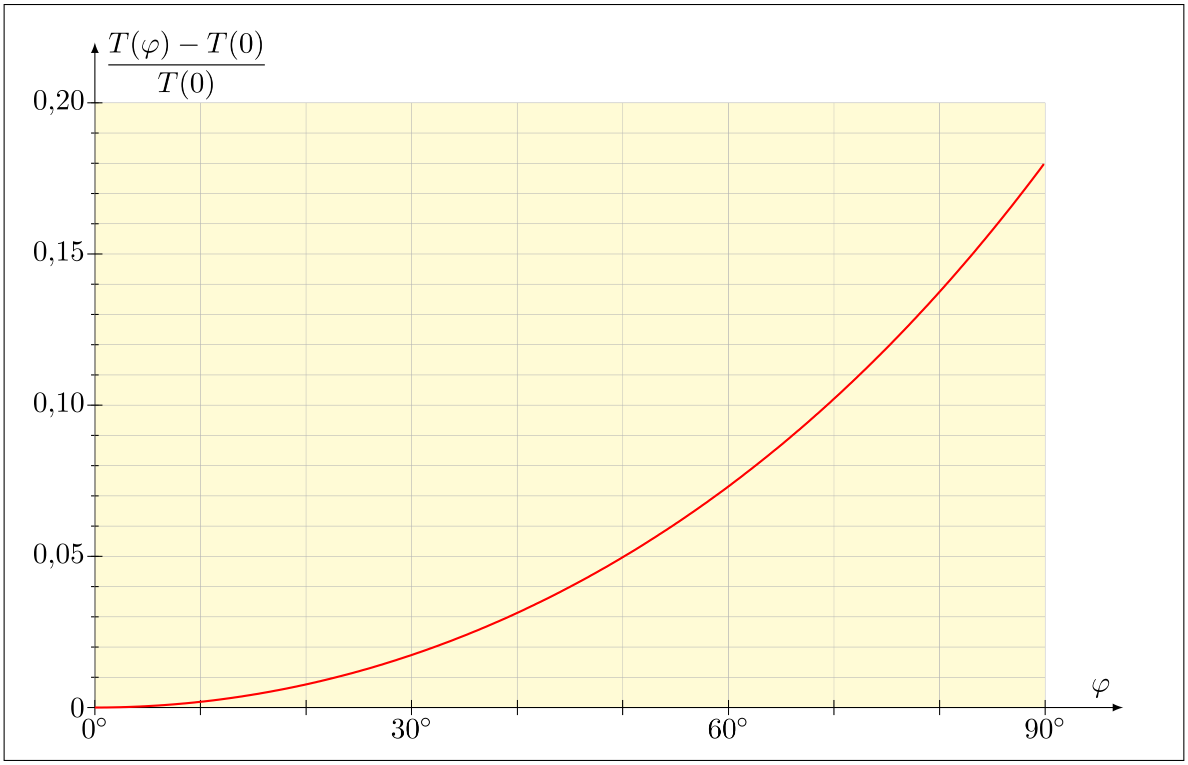

Abbildung 2: Relative Vergrösserung der Periode T in Funktion der maximalen Amplitude φ.

3 Experiment

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 3 wiedergegeben.

Zunächst werden beide Pendel mit gleicher Amplitude ausgelenkt. Sie schwingen dann synchron.

Anschliessend werden die Pendel verschieden weit ausgelenkt. Man beobachtet dann, wie sie wegen der unterschiedlichen Periode ausser Takt geraten.

Abbildung 3: Zwei Fadenpendel