

## 1.7.2 Wasserrakete



### 1 Motivation

Der Schub (=Antriebskraft) bei einer Rakete ist proportional zur ausgestossenen Masse.

### 2 Theorie

Der Raketenantrieb folgt aus der Impulserhaltung. Während sonst Kräfte im allgemeinen durch Stösse von aussen ausgeübt werden, die den Impuls auf eine konstante Masse übertragen, stösst die Rakete Masse mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  aus, welche einen Impuls  $d\mathbf{p}$  mit sich trägt und damit der Rakete einen entgegengesetzten Impuls  $-d\mathbf{p}$  erteilt:

$$d\mathbf{p} = d(m\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot dm + \underbrace{m \cdot d\mathbf{u}}_{\equiv 0} \quad (1)$$

Eine Rakete erzeugt ihren **Schub** (= Kraft), indem Treibstoff verbrannt und das dadurch erzeugte Gas nach hinten ausgestossen wird. Die Rakete wird durch den Rückstoss nach vorne getrieben (Siehe Abb. 1).

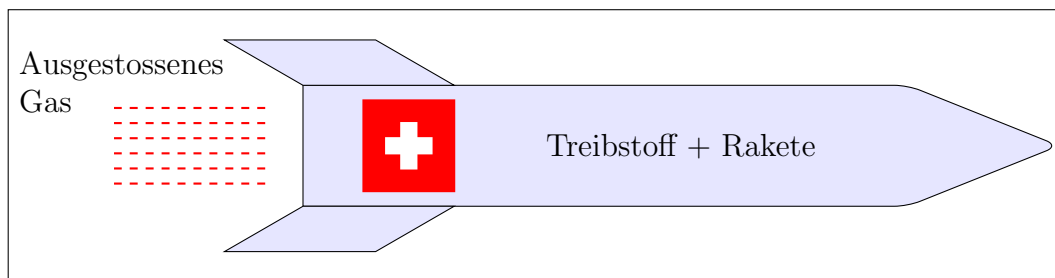


Abbildung 1: Prinzip des Raketenantriebs.

Wenn man Raketen in den Weltraum schiesst, drückt die Rakete gegen das Gas, das von ihr ausgestossen wird. Das Medium (d.h. Luft in der Nähe der Erdoberfläche) hat in diesem Fall nichts mit dem Antrieb zu tun!

Nun berechnen wir die sogenannte Raketengleichung. Wir benötigen dazu nur das Impulserhaltungsgesetz.

Wir definieren die folgenden Grössen:

- a)  $v(t)$  = Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit  $t$ .
- b)  $u$  = konstante Ausstosseschwindigkeit des Gases relativ zur Rakete, und
- c)  $M(t)$  = Masse der Rakete zur Zeit  $t$ .

Wir berechnen die Impulsänderung des gesamten Systems während eines Zeitintervalls  $\Delta t$ . Wegen der Impulserhaltung muss die Impulsänderung gleich null sein (Wir nehmen an, dass keine äussere Kraft auf die Rakete wirkt).

Zur Zeit  $t$  bewege sich die Rakete mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v$ .

Der Impuls der Rakete ist gleich

$$p(t) = M(t) \cdot v(t) \quad (2)$$

Nach der Zeit  $dt$  hat die Rakete eine Masse  $M-dm$  (wobei  $dm$  positiv ist und der Masse des ausgestossenen Gases entspricht) und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit  $v + dv$ .

Wenn das Gas mit einer Geschwindigkeit  $u$  relativ zur Rakete ausgestossen wird, bewegt es sich relativ zum Laborsystem mit der Geschwindigkeit  $v-u$ .

Der Gesamtimpuls ist deshalb gleich

$$p(t + dt) = (M - dm)(v + dv) + dm(v - u) \quad (3)$$

$$\Rightarrow p(t + dt) = M v + M dv - v dm - dm dv + v dm - u dm \quad (4)$$

$$\approx M v + M dv - u dm, \quad (5)$$

wobei wir den Term  $dm dv$  weggelassen haben, weil er ein Produkt aus zwei sehr kleinen Grössen ist und daher im Vergleich zu den anderen Grössen vernachlässigbar ist.

Die Impulsänderung während des Zeitintervalls  $dt$  ist

$$\begin{aligned} p(t + dt) - p(t) &\approx \{M v + M dv - u dm\} - M v \\ &\approx M dv - u dm \\ &\equiv 0, \end{aligned} \quad (6)$$

wobei wir die Impulserhaltung verwendet haben. Es gilt daher

$$M dv = u dm \quad \Rightarrow \quad M \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} \quad (7)$$

Aus  $M(dv/dt) = F$  folgt, dass auf die Rakete eine Schubkraft  $F$  wirkt, mit dem Betrag

$$F = u \frac{dm}{dt} \quad (8)$$

und dass daher die Rakete beschleunigt wird.

Wir integrieren nun die Raketengleichung und erhalten

$$M \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{u}{M} \frac{dm}{dt} \quad (9)$$

oder (mit  $dm = -dM$ )

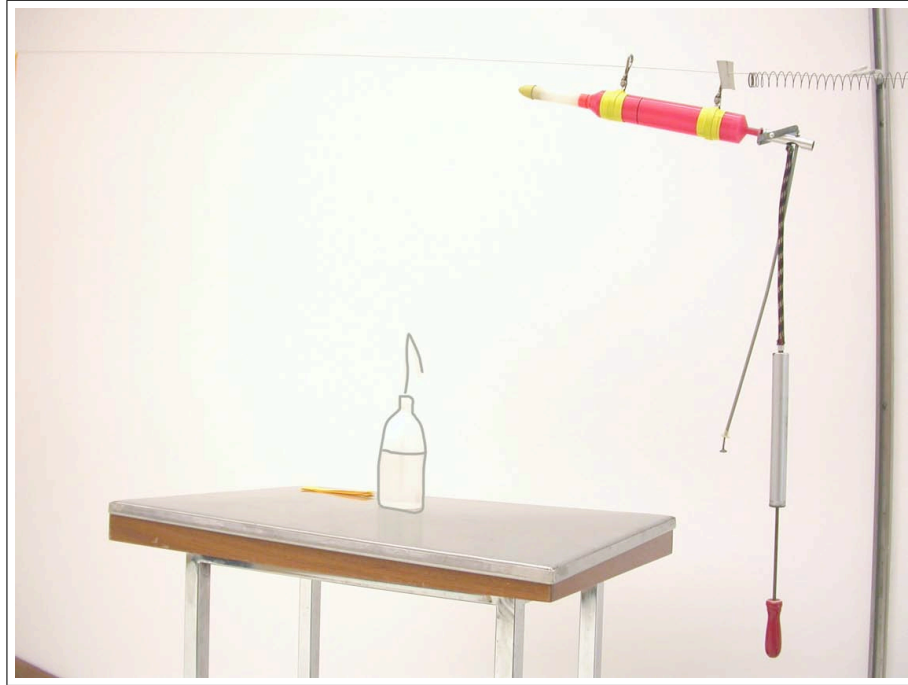


Abbildung 2: Versuchsaufbau „Wasserrakete“.

$$\int_{t_0}^t \frac{dv}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t \frac{u}{M(t')} \frac{dm}{dt'} dt' = -u \int_{t_0}^t \frac{1}{M(t')} \frac{dM}{dt'} dt' \quad (10)$$

wobei wir angenommen haben, dass die Ausstosseschwindigkeit des Gases **relativ zur Rakete** konstant ist, und dass die Masse des Gases aus der Abnahme der Masse der Rakete kommt. Damit gilt:

$$v(t) - v_0 = -u \int_{M_0}^{M(t)} \frac{dM'}{M'} = -u \{ \ln(M_0 - m) - \ln M_0 \} \quad (11)$$

wobei  $M_0$  die Anfangsmasse der Rakete zur Zeit  $t = t_0$  und  $m$  die Gesamtmasse des ausgestossenen Gases ist. Wir setzen im Weiteren die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$  und führen die dimensionslosen Variablen

$$\eta(t) = \frac{v(t)}{u} \quad \xi(t) = \frac{m(t)}{M_0} \quad (12)$$

ein. Damit erhalten wir

$$\eta(t) = -\ln(1 - \xi) \quad (13)$$

Für den Fall  $1/(1 - \xi) > e$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \xi} > e &\Rightarrow -\ln(1 - \xi) > 1 \\ &\Rightarrow \eta > 1 \quad \Rightarrow v > u \end{aligned} \quad (14)$$

Dann bewegt sich für einen Beobachter das ausgestossene Gas *in der gleichen Richtung wie die Rakete*.

### 3 Experiment

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 2 zu sehen. Die Rakete ist mittels zweier Ösen an einem Draht befestigt, so dass die Bewegung linear verläuft. Nach Gl. (8) ist die Kraft proportional zu  $u \cdot \dot{m}$ . Bei gleicher Ausströmgeschwindigkeit ist die Kraft also umso grösser, je grösser die ausgestossene Masse ist.

Um dies zu zeigen, pumpt man die Rakete zunächst nur mit Luft auf. Damit erzielt man aber nur eine sehr kleine Geschwindigkeit (siehe Abb. 3). Anschliessend füllt man die Rakete teilweise mit Wasser und pumpt wieder mit Luft auf. Dieses Mal schiesst die Rakete mit beachtlicher Geschwindigkeit ab, da die Luft wegen der leichten Steigung des Drahtes das Wasser hinausdrängt.

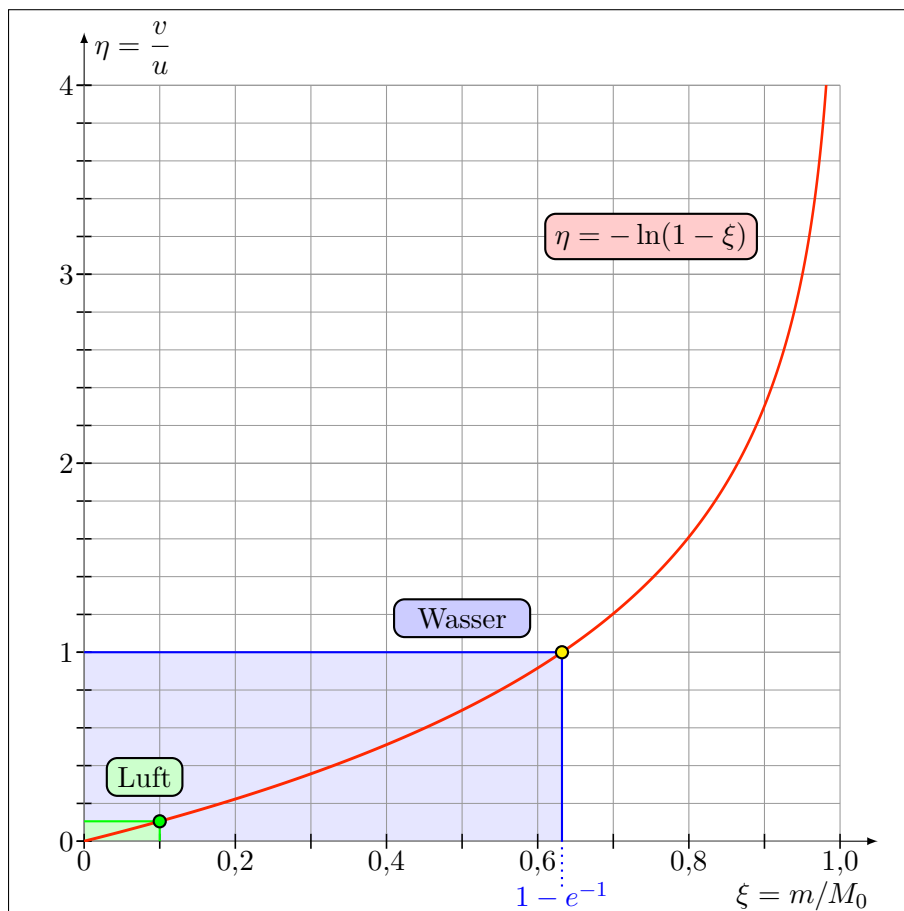


Abbildung 3: Relativgeschwindigkeit  $\eta = v/u$  in Funktion von  $\xi = m/M_0$ , wobei  $u$  die Ausstosseschwindigkeit und  $v$  die erreichte Raketengeschwindigkeit,  $M_0$  die anfängliche Masse der Rakete und  $m$  die insgesamt ausgestossene Masse bedeuten.